



TITLE:

Bernoulli関数のDirichlet指標和への応用 (数論的関数の特性)

AUTHOR(S):

金光, 滋; 白谷, 克巳

CITATION:

金光, 滋 ...[et al]. Bernoulli関数のDirichlet指標和への応用 (数論的関数の特性). 数理解析研究所講究録 1976, 274: 148-151

ISSUE DATE:

1976-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105968>

RIGHT:

Bernoulli 関数の Dirichlet 指標和への応用

九 大 理 金 光 滋
白 谷 克 巳

論文 [3] の目的は, Hua [1] の指標和に関する不等式の一般化を与えることである。即ち, 次の定理が成り立つ。

定理 1. χ が f を法とする, 単位指標 χ_0 と異なる, 原始的 Dirichlet 指標で, しかも偶指標であるとき, 偶数 n と, $1 \leq m_0 < f$ なる m_0 に対し, 不等式

$$\left| \sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m)^{n-1} \chi(m) - \frac{1}{n} \{ (B_{\chi} - m_0)^n - B_{\chi}^n \} \right| \leq \frac{1}{n} f^{n-\frac{1}{2}} \left| B_n\left(\frac{m_0}{f}\right) - B_n(0) \right|$$

が成り立つ。ここで $B_n(\alpha)$ は n 番目の Bernoulli 多項式を, B_{χ}^n は Leopoldt の一般 Bernoulli 数 $B_{\chi}^n = f^{n-1} \sum_{m=1}^f \chi(m) B_n\left(\frac{m}{f}\right)$ を表わし, $(B_{\chi} - m_0)^n$ は記号的に $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_{\chi}^r (-m_0)^{n-r}$ を表わす。

まず, 次の補題が成り立つ。

補題. χ が f を法とする, χ_0 と異なる原始指標であるとき, $n \geq 2$ に対し,

$$\sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m)^{n-1} \chi(m) = (-1)^n \frac{1}{n} \{ (B_{\chi - m_0})^n - B_{\chi}^n \} \\ + (-1)^n f^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(2\pi i)^n} \tau(\chi) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \frac{m_0}{f} l} - 1}{l^n} \bar{\chi}(l)$$

となる。ここで $\tau(\chi)$ は正規化された Gauss の和で、 $\bar{\chi}$ は χ の逆指標を示し、 \sum' は $l=0$ に対応する項を除いた和を表わす。

証明. Bernoulli 関数 $P_n(x)$ を、 $P_n(x) = B_n(x)$ ($0 \leq x < 1$),

$P_n(x+1) = P_n(x)$ と定義すれば、

$$-B_n(x - \frac{m_0}{f}) + B_n(x) + P_n(x - \frac{m_0}{f}) - P_n(x) = \begin{cases} n(x - \frac{m_0}{f})^{n-1}, & 0 \leq x < \frac{m_0}{f}, \\ 0, & \frac{m_0}{f} \leq x < 1 \end{cases}$$

が得られる。これを我々の和に適用すれば、

$$\sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m)^{n-1} \chi(m) = (-1)^n \frac{1}{n} f^{n-1} \sum_{m=1}^f \left\{ B_n(\frac{m}{f} - \frac{m_0}{f}) - B_n(\frac{m}{f}) \right\} \chi(m) \\ + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} f^{n-1} \sum_{m=1}^f \left\{ P_n(\frac{m}{f} - \frac{m_0}{f}) - P_n(\frac{m}{f}) \right\} \chi(m)$$

となり、第1項は、Bernoulli 多項式の性質を用いて、

$(-1)^n \frac{1}{n} \{ (B_{\chi - m_0})^n - B_{\chi}^n \}$ となることがわかる。第2項は、

Bernoulli 関数の Fourier 級数展開

$$P_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i l x}}{l^n}$$

を使えば、 $(-1)^n f^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(2\pi i)^n} \tau(\chi) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \frac{m_0}{f} l} - 1}{l^n} \bar{\chi}(l)$

となる。

定理の証明. 補題の表示式の第2項の Fourier 級数の部分

は、 χ, n が偶のとき、 $-4 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \frac{m_0}{f} l}{l^n} \bar{\chi}(l)$

となるが、これは、絶対値において、 $4 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \frac{m_0}{f} l}{l^n}$ 以下である。

一方、 $0 \leq x < 1$ での $B_n(x)$ の Fourier 級数表示は

$$B_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi l x}{l^n}$$

であったから, これから $B_n(\frac{m_0}{f}) - B_n(0)$ の絶対値を求め, 上の評価と比較すれば定理が得られる.

定理2. 定理1の条件の下で,

$$\left| \sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m) \chi(m) \right| \leq \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} m_0 \left(1 - \frac{m_0}{f}\right).$$

証明. 定理1で $n=2$ の場合である. $B_x^1 = B_x^0 = 0$ に注意すればよい.

注1. 定理2から $|S_2(A)| = \left| \sum_{a=1}^A \sum_{m=1}^a \chi(m) \right| \leq \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} A$, $A \geq 1$ が直ちに導びかれ, これを用いて, 実2次体の基本単数に対する Hua の評価 $\log \varepsilon < f^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \log f + 1 \right)$ が得られる.

定理3. 定理1の条件の下で,

$$\left| \sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m)^{n-1} \chi(m) \right| \leq c f^{n-\frac{1}{2}} (n-1)! \frac{1}{(2\pi)^n},$$

ここで c は正の絶対定数である.

証明. $B_x^n \ll n! f^{n-\frac{1}{2}}$, $n \geq 2$ を用いればよい.

注2. 帰納的に $S_n(x) = \sum_{m=1}^x S_{n-1}(m)$, $S_1(x) = \sum_{m=1}^x \chi(m)$ と定義するとき, 次の関係式が成り立つ.

$$S_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{b=1}^{n-1} S(n-1, b) (-1)^{n-1+b} \sum_{j=1}^{x+1} (x+1-j)^b x C_j^x,$$

ここで, $S(a, b)$ は, 第1種の Stirling 数で,

$$x(x-1)\cdots(x-a+1) = \sum_{b=1}^a S(a, b) x^b$$

により定義される。

注3. x が奇指標で, n が3以上の奇数のときも同様な定理が成り立つ。

文 献

- [1] L. K. Hua, On the least solution of Pell's equation, *Bull. Amer. Math. Soc.* 48(1942), 731-735.
- [2] G. Polya, Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste, *Göttinger Nachr.* 1(1948), 21-29.
- [3] S. Kanemitsu and K. Shiratani, An application of the Bernoulli functions to character sums, *Mem. Facu. Sci., Kyushu Univ.*, 30(1976) (to appear).